Παράδειγμα

Α διαφορά του $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ και $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

Ξεκινάμε από τη δεύτερη περίπτωση που γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος είναι ασταθής. Έστω $x=12{,}5$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$= 1 - 19{,}5 + 78{,}125 - 325{,}5208 + \dots$

Ο $\underline{\underline{13^{ος}}}$ όρος $(n=12)$ είναι 30379,68. Όμως ο $e^{-19{,}5}$ είναι εξαιρετικά μικρός $e^{-19{,}5} \approx 0{,}372665\ 10^{-5}$

<u>Παρατήρηση</u>: Για το αριθμό 30379,68 έχω 5 ψηφία σε ακέραιη θέση και 2 δεκαδικά. Συνολικά δηλαδή χρειάζονται 7 ψηφία για να έχω ακρίβεια 10^{-2}.

Αντίθετα $e^{19{,}5} = 268337{,}28659\,21$ είναι ένας εξαιρετικά μεγάλος αριθμός. Λάθος της τάξης 10^{-2} είναι αμελητέα. Άρα $e^{-19{,}5} = \dfrac{1}{e^{19{,}5}} = 0{,}372665\,10^{-5}$

<u>Συστήματα Αριθμών</u>

<u>Ορισμός</u>. Κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα σε ένα σύστημα αριθμών με βάση $b \geq 2$ ως $x = \pm \sum_{i=n}^{\infty} d_i b^i$ όπου d_i οι συντελεστές της σειράς, είναι στοιχεία από το σύνολο $D = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ και ονομάζονται ψηφία του αριθμού x. Η τιμή της βάσης b, σε ένα σύστημα αριθμών, καθορίζει και την ονομασία του συστήματος. Δηλ. αν $b=2$ έχουμε το δυαδικό, αν $b=10$ το δεκαδικό κ.τ.λ.

<u>Ορισμός</u> Ένας αριθμός x σε ένα σύστημα αριθμών με βάση b μπορεί να γραφεί ως $x = \pm r\, b^{\pm E}$ όπου E είναι μη αρνητικός ακέραιος και r ένας αριθμός στο σύστημα αριθμών με βάση b. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται αναπαράσταση κινητής υποδιαστολής.

Συντελεστής μετάδοσης σχετικού σφάλματος

Επανερχόμαστε στον υπολογισμό σφαλμάτων σε αθροίσματα. Θεωρούμε το άθροισμα $S_N=\sum_{i=1}^{N} a_i$ και χρησιμοποιώ τον αλγόριθμο: $S_1=a_1$, $S_k=S_{k-1}+a_k$, $k=2,\dots,N$

Είχαμε γράψει ότι

$S_1^*=a_1$

$S_2^*=(a_1+a_2)(1+\varepsilon_1)=S_2(1+\varepsilon_1)$

$S_3^*=(S_2^*+a_3)(1+\varepsilon_2)=\left[S_2(1+\varepsilon_1)+a_3\right](1+\varepsilon_2)=$

$=(\underbrace{S_3}_{S_2+a_3}+\varepsilon_1 \underbrace{S_2)}_{1+\varepsilon_2} \cong S_3+\varepsilon_1 S_2+S_3\varepsilon_2+\cancel{\varepsilon_1\varepsilon_2 S_2}$

$S_4^*=(S_3^*+a_4)(1+\varepsilon_3)=\underset{\text{κάνω τις πράξεις}}{?}=S_4+S_4\varepsilon_3+S_3\varepsilon_2+S_1\varepsilon_1$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in[-\delta,\delta]$. Τότε υπάρχει $\varepsilon_3\in[-\delta,\delta]$ τέτοιο ώστε $\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2\le(|\lambda|+|\mu|)\varepsilon_3$.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $\lambda=\mu=0$ τότε ισχύει η ισότητα με προφανή τρόπο (ταυτότητα).
Σε κάθε άλλη περίπτωση

$$\varepsilon_3=\frac{\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2}{|\lambda|+|\mu|}\le\left|\frac{\lambda\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2}{|\lambda|+|\mu|}\right|=\frac{|\lambda\varepsilon_1-\mu\varepsilon_2|}{|\lambda|+|\mu|}\le$$

$$\le\frac{|\lambda\varepsilon_1|+|\mu\varepsilon_1|}{|\lambda|+|\mu|}\le\frac{|\lambda|\delta+|\mu|\delta}{|\lambda|+|\mu|}=\frac{|\lambda|+|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\delta=\delta$$

$|\lambda\varepsilon_1|=|\lambda|\,|\varepsilon_1|\le|\lambda|\,\delta$ $\qquad |\varepsilon_3|\le\delta$

$|\mu\varepsilon_2|=|\lambda|\,|\varepsilon_2|\le|\mu|\,\delta$

Επανερχόμαστε στα διαδοχικά αθροίσματα

$$S_3^* = S_3 + S_2\varepsilon_1 + S_3\varepsilon_2 \le S_3 + (|S_2| + |S_3|)\delta.$$

και κατ' αναλογία μπορούμε να δείξουμε

$S_N^* \le S_N + (|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|)\delta_N$ και το σχετικό σφάλμα είναι

$$\frac{S_N^* - S_N}{S_N} \le \frac{|S_1| + |S_2| + \dots + |S_N|}{S_N}\delta_N \Rightarrow$$

$$\left|\frac{S_N^* - S_N}{S_N}\right| \le \frac{|S_1| + |S_2| + \dots + |S_N|}{S_N} \cdot \delta_N$$

Ορίζουμε ως συντελεστή μετάδοσης σχετικού σφάλματος την ποσότητα $P_N = \frac{\gamma_N}{|S_N|} = \frac{|S_1| + |S_2| + \dots + |S_N|}{|S_N|}$

Αν ο αριθμός αυτός είναι μεγάλος τότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν ένα ενδιάμεσο σφάλμα έχει απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερη από την $|S_N|$ τότε το P_N είναι μεγάλος αριθμός

<u>Παράδειγμα</u>

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

διαλέγω $\underline{\underline{x = 100}}$

$S_1 = 1$, $S_2 = 1 - x = -99$

$S_3 = 1 - x + \frac{x^2}{2} = 4901$

$S_4 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \simeq -161766$

Όμως $e^{-100} \approx 0$ άρα αλγόριθμος εξαιρετικά ασταθής

Άσκηση

Να επαναλάβω το ίδιο με το e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Κατάσταση προβλημάτων

Ένα πρόβλημα έχει καλή κατάσταση αν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν μικρή μεταβολή στη λύση του. Αντίθετα αν μικρές μεταβολές των δεδομένων έχουν μεγάλες μεταβολές στη λύση τότε το πρόβλημα έχει κακή κατάσταση

Παράδειγμα

Η λύση της εξίσωσης $(x-2)^6 = 0 \Rightarrow x = 2$

(πολλαπλότητα 6)

Αντίστοιχα $(x-2)^6 = 10^{-6} = 10^{-6} \cdot 1 = 10^{-6} e^{2in\pi}$, $n = 0,1,2,3,4,5$, $i^2 = -1$

$\Rightarrow \boxed{x-2 = 0{,}1\, e^{in\pi/3}}$ ή

$|x-2| = 0{,}1 = \frac{1}{10}$ Κακή κατάσταση